土木計画学研究・論文集，Vol.27，No.3，pp.501-506，2010

Nested Logit Model のパラメータ推定の安定性に関する研究*1
Study on Estimation Stability of Nested Logit Models*1

菊池輝*2，明壁佳久*3，中井周作*4，藤井聡*2，北村隆一*5

*By Akira KIKUCHI**2, *Yoshihisa ASUKABE**3, *Shusaku NAKAI**4, *Satoshi FUJII**2 *and Ryuichi KITAMURA**4

1．はじめに

近年，超電導リニア，LRT，セグウェイなどの新交通システムが話題となっている．新交通システムの導入の是非を議論するにあたり，交通需要予測は重要な計画要素である．そして，交通需要予測の代表的な手段として，離散選択モデル[1)]が挙げられる．これまでに様々な離散選択モデルが開発されており，中でも Probit Model，Nested Logit Model，Mixed Logit Model に代表される Non-IIA model は選択肢間の誤差項に相関のある選択問題を扱えることから，幅広い分野で適用されている．

しかし Non-IIA Model の方が IIA Model よりも優れた一般的なモデルで有用であるとの判断できるか否かについては，一定の慎重さが必要であるものと考えられる．何故なら，Non-IIA Model の推定値の安定性には未だ疑問点が残されているほか，推定の簡易さに関しては尤度関数の凹性が保障されているという理由から確定効用部分のみを用いて尤度関数が定式化される Logit Model の方が優れているからである．事実このような視点のもと，Non-IIA model の特性を把握するいくつかの既往研究[2) 3)]が存在するが，実測データを用いた検証が大半を占めており，評価はモデルの goodness-of-fitting を用いたものに留まっている．

そのような中で，B.R. Dansie[4)]は，誤差構造を一意に決定できない場合が存在する問題，すなわち identification problem を Probit Model が有することを理論的に示した．それを受けて，Walker. J[5)6)]，兵藤ら[7)]，そして Nakai and Kitamura[8)]は，実測データではなく，人工データを作成し，Mixed Logit Model の推定安定性に関する問題点を提起している．しかしながら，Mixed Logit Model と同じく代表的な Non-IIA model であり，かつ，より古くから活用されてきた Nested Logit Model についての，そうした詳しい検証は十分に為されていないのが実情である．

そこで本研究では，Nested Logit Model の特性及び問題点を，実測データを用いずに明らかにすることを目的とする．具体的には，同一のパラメータ，誤差構造を持つ離散選択人工データを複数セット作成した上で，Nested Logit Model の推定を行い，得られたパラメータ推定値や誤差構造の再現性，推定値の分布に着目した考察を行う．加えて，重要予測への適用の観点から，選択確率の推定値に関する考察を行う．

2．離散選択データの作成[9)]

分析者が離散選択モデルを推定する際には，まず効用関数，言い換えれば誤差構造を特定する必要がある．しかし，現実には誤差構造は観測不可能であり，実際の誤差構造と特定した誤差構造とに乖離が存在することは否めない．本研究ではその乖離に起因する問題を明らかにするために，シミュレーションにより作成した離散選択データを用いた検証を行う．実際の行動データを用いた検証ではパラメータや誤差構造が未知であり，これらの再現性を知る術はない．そのため，尤度に関する指標にてデータへの goodness-of-fitting を把握し，推定結果を評価する以上の，モデル検証の方法を考えることは難しい．しかし人工データを用いた検証では，誤差構造をあらかじめ与えた上でモデル推計を行うことができることから，厳密にモデルの推定精度を評価することが可能となる．

本研究で用いる離散選択人工データは，個人数（オブザベーション数）が 1,000，2 説明変数，3 選択肢の Probit Choice Probabilities に従う離散選択結果をあらかじめシミュレートすることで作成した．Probit Model の誤差構造，つまり誤差項の共分散行列を用いることで，選択肢間の誤差項の相関を表現した．誤差項の実現値を確率的に生成させ，式(1)で表す効用関数に従い効用を算出し，最大の効用となった選択肢が選ばれるというランダム効用最大モデルの考え方に基づいて，選択データを作成した．

$$U_{in} = \beta_1 X_{1in} + \beta_2 X_{2in} + \varepsilon_{in} \tag{1}$$

U_{in} ：個人 n が選択肢 i を選択したときの効用

X_{jin} ：個人 n の選択肢 i に関する $j\,(j=1,2)$ 番目の説明変数

β_j ： $j\,(j=1,2)$ 番目の説明変数に関するパラメータ

---

*1 キーワーズ: Nested Logit Model, Non-IIA Model，離散選択

*2 正員，工博，京都大学大学院工学研究科都市社会工学専攻（京都市西京区京都大学桂 4-C1-2,

TEL 075-383-3240, E-mail:kikuchi@trans.kuciv.kyoto-u.ac.jp）

*3 非会員，東京建物株式会社

*4 学生員，工修，京都大学大学院工学研究科都市社会工学専攻

*5 正員, Ph.D.，京都大学大学院工学研究科都市社会工学専攻

土木計画学研究･論文集，Vol.27，No.3，pp.501-506，2010

ε_{in} ：個人 n の選択肢 i に関する誤差項（正規分布に従う）

(1)　説明変数の作成

作成する 2 説明変数は，標準正規分布に従う正規乱数を発生させた．

(2)　誤差項の作成

誤差項の作成にあたり，**図1**に示すように，選択肢1が独立であり，選択肢2と選択肢3の誤差項間に相関があるネスト構造を仮定した．図中では，上位選択肢に対して番号 $m(m=1,2)$ を付し，下位選択肢については，任意の上位選択肢 m の下に対して $rm(r=1,2)$ なる2桁の番号を付している．

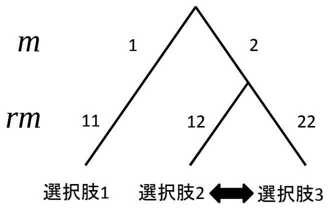

図 1．人工データの選択肢のネスト構造

誤差項の生成においては，まず，独立な正規乱数 r_1, r_2, r_3 を生成し，コレスキー分解を用いて，式(2)で表される誤差の共分散行列 $\sum_\varepsilon$ に従う乱数すなわち，誤差項 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ を生成する．

$$\begin{pmatrix}\varepsilon_1\\ \varepsilon_2\\ \varepsilon_3\end{pmatrix} \sim \sum_\varepsilon = \sigma^2 \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & \sigma_{23}\\ 0 & \sigma_{23} & 1\end{pmatrix} \tag{2}$$

ここで，σ^2 は分散，σ_{11} は ε_{1n} の分散，σ_{23} は ε_{2n} と ε_{3n} の相関係数，すなわち誤差相関係数である．ここで本研究では，$\sigma^2 = 1.0$ とし，σ_{23} を 0.00，0.10，0.30，0.50，070，0.90 と複数の値を設定し，誤差項を作成した．

(3)　離散選択のシミュレート

前節までに作成した説明変数と誤差項に加え，式(1)で表す効用関数のパラメータ値を設定することで効用を算出し，最大効用となる選択肢が選ばれたとみなす．このシミュレートをオブザベーション数だけ繰り返し，1セットの離散選択データとする．本研究では式(3)のとおりパラメータ値を設定した．

$$\begin{cases}\beta_1 = 1.0\\ \beta_2 = 0.5\end{cases} \tag{3}$$

本研究ではパラメータ推定値と設定値との比較に加えて，推定値の分布の考察を行うため，設定した 6 種類の誤差相関係数毎に 100 セットの離散選択データを作成した．

3．検証

(1)　概要

本稿では，選択肢のネスト構造の特定に着目する．まず**3.(2)**にてデータのネスト構造と特定したネスト構造とに乖離が無い状況を想定し，Nested Logit Modelの特徴を明らかにする．ここでは，前章で作成した離散選択データを用いて，既知であるデータの誤差構造を特定し推定を行い，誤差相関係数毎に100セットの推定結果を得る．設定値との比較から再現性を，推定値のバラツキから推定値の安定性を把握する．

続いて**3.(3)**にて誤差構造が未知である，というより現実的な状況を想定し，既知であるデータのネスト構造と異なるネスト構造を特定し推定することで，Nested Logit Modelの持つモデルの特定化と推定値の関係を明らかにする．なお，推定ソフトウェアはRを用いた．

(2) データと等しいネスト構造を特定した場合

ここでは，**図 1** に示したデータと等しいネスト構造を特定する．すなわち，選択肢 2 と選択肢 3 が同一の上位選択肢の下に属するとする．このとき効用関数を式(4)で特定する．ここに，$\varepsilon_{(r|m)n}$ は m を選択した条件の下で rm を選択したときの効用の誤差項，ε_{mn} は m を選択したときの効用の誤差項とする．

$$\begin{cases}U_{1n} = \beta_1 X_{11n} + \beta_2 X_{12n} + \varepsilon_{(1|1)n} + \varepsilon_{1n}\\ U_{2n} = \beta_1 X_{21n} + \beta_2 X_{22n} + \varepsilon_{(1|2)n} + \varepsilon_{2n}\\ U_{3n} = \beta_1 X_{31n} + \beta_2 X_{32n} + \varepsilon_{(2|2)n} + \varepsilon_{2n}\end{cases} \tag{4}$$

誤差項はいずれもロケーションパラメータ0, スケールパラメータ μ のGumbel分布に従うとする．このとき，選択肢2と選択肢3の誤差相関係数は次式で表される．

$$\sigma_{23} = 1 - \mu^2 \tag{5}$$

また，式(4)のように効用関数を特定したとき，選択確率式は次式で表される．

$$\begin{cases}P_{11n} = \dfrac{\exp(V_1)}{\exp(V_1) + \{\exp(V_2/\mu) + \exp(V_3/\mu)\}^{\mu}}\\ P_{12n} = \dfrac{\exp(V_2/\mu)\{\exp(V_2/\mu) + \exp(V_3/\mu)\}^{\mu-1}}{\exp(V_1) + \{\exp(V_2/\mu) + \exp(V_3/\mu)\}^{\mu}}\\ P_{22n} = \dfrac{\exp(V_3/\mu)\{\exp(V_2/\mu) + \exp(V_3/\mu)\}^{\mu-1}}{\exp(V_1) + \{\exp(V_2/\mu) + \exp(V_3/\mu)\}^{\mu}}\end{cases} \tag{6}$$

この式(6)を用いて最尤推定法により未知パラメータを推定する．ここで未知パラメータは効用関数の確定効用

土木計画学研究・論文集，Vol.27，No.3，pp.501-506，2010

部分のパラメータβ_1，β_2，誤差項のスケールパラメータμである．β_1の設定値は1.0，β_2の設定値は0.5であり，μの値は式(5)より誤差相関係数σ_{23}を用いて算出する（**表１**）．以降，推定値にはハット記号を付す．

表１　誤差相関係数とスケールパラメータ

誤差相関係数	0.00	0.10	0.30	0.50	0.70	0.90
スケールパラメータ	1.00	0.95	0.84	0.71	0.55	0.32

まず，尤度によるgoodness-of-fittingに関して，σ_{23}毎100回分の推定結果より得られた対数最終尤度の分布を**図3**に示す．ここで，図中の実線は初期尤度値を示す．初期尤度と最終尤度に有意な差が見られるため，モデルは人工データへ十分に当てはまっていることが分かる．また誤差相関係数が大きくなるにつれ，モデルのgoodness-of-fittingが上昇することが分かる．これは，選択肢2と選択肢3の誤差相関が大きくなるに従い，上位の選択における選択肢1の選択確率が大きくなった分が，Nested Logit Modelの対数尤度関数に反映された結果と考えられる．

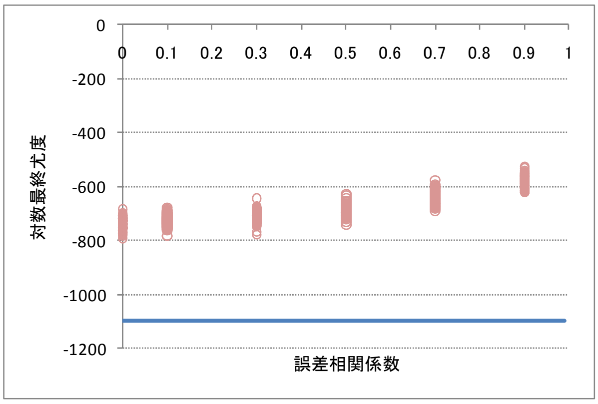

図３．σ_{23} 毎の対数最終尤度の分布

次に，スケールパラメータの推定結果について考察を行う．スケールパラメータの推定結果について，σ_{23}毎に推定したスケールパラメータ$\hat{\mu}$の分布を**図4**に示す．図中の実線は式(5)から算出したσ_{23}毎のスケールパラメータμの設定値を示す．誤差相関係数σ_{23}の値によらずスケールパラメータ$\hat{\mu}$は設定値付近に分布していることがわかる．また，誤差相関係数 が増大するに従ってスケールパラメータの標準偏差が減少している．すなわち，弱度の正の相関の下では推定される相関関係には曖昧性が高い一方，相関が強くなるに従ってその曖昧性が減少していく結果となった．

次に，確定効用部分のパラメータの推定結果について考察を行う．誤差相関係数σ_{23}毎に推定した確定効用部分のパラメータ$\hat{\beta}_1$の値の分布を**図５**に示す．ただし，図中の実線はβ_1の設定値，すなわち$\hat{\beta}_1=1.0$を示す．誤差相関係数σ_{23}の値によらず確定効用部分のパラメータ$\hat{\beta}_1$も設定値付近に分布していることがわかる．また，$\hat{\beta}_2$も同様の結果が得られている．

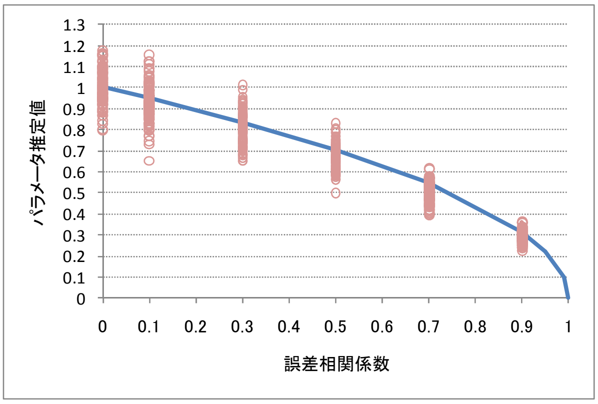

図４．σ_{23} 毎の $\hat{\mu}$ の分布

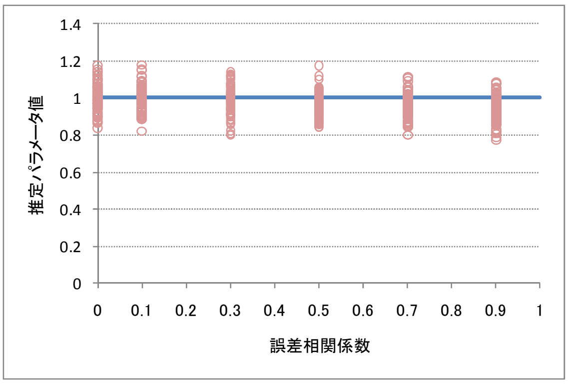

図５．σ_{23} 毎の $\hat{\beta}_1$ の分布

最後に，選択確率の推定結果について，**図６**にて選択確率推定値の平均値と，式 (6) において$\beta_1=1.0$，$\beta_2=0.5$として人工データから算出した選択確率値の平均値との比較を行う．

推定値の平均値と人工データの平均値は，σ_{23}の値によらず等しくなっていることがわかる．

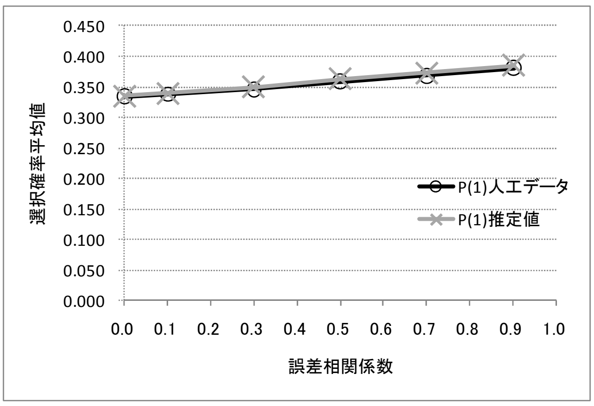

図６a．σ_{23} 毎の $\hat{P}_{11}$ の平均値

土木計画学研究・論文集, Vol.27, No.3, pp.501-506, 2010

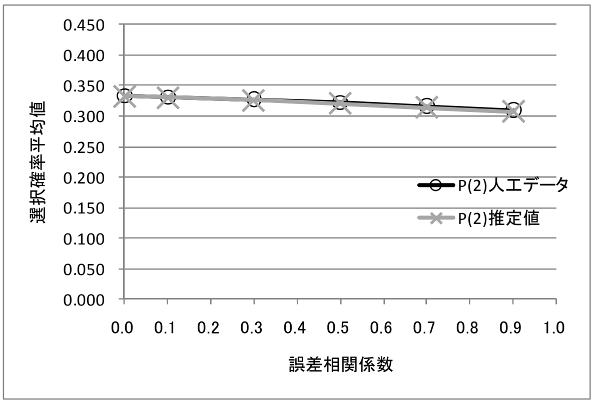

図 6b．σ_{23} 毎の $\hat{P}_{12}$ の平均値

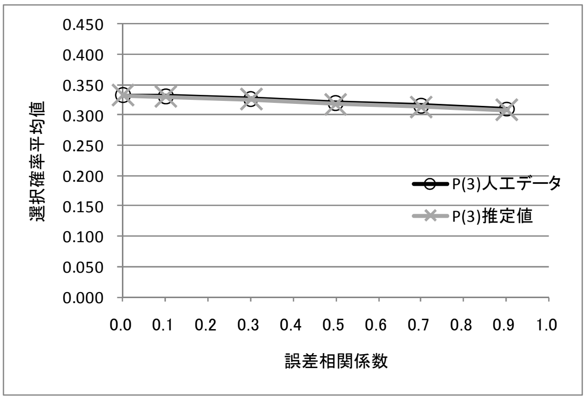

図 6c．σ_{23} 毎の $\hat{P}_{22}$ の平均値

以上の推定結果から，Nested logit model はデータと等しい誤差構造を特定した場合には，誤差相関係数σ_{23}の値によらず，需要予測に足る高い推定精度を有するモデルと考えられる．

(3) 人工データと異なるネスト構造を特定した場合

ここでは，**図 7** に示すように人工データと異なるネスト構造を特定する．すなわち，選択肢 1 と選択肢 2 が同一の上位選択肢の下に属するとする．

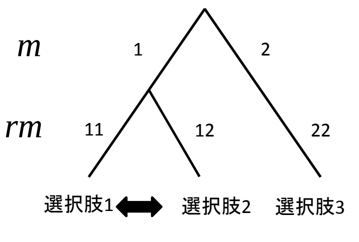

図 7．3.(3)にて特定する選択肢のネスト構造

Nested Logit Model では，特定したネスト構造がデータのネスト構造と異なる場合，スケールパラメータの値は有意に 1 を超えて推定されるであろう，と一般に言われている点に注目する．本節では尤度による goodness-of-fitting およびスケールパラメータの推定値から，異なるネスト構造を特定した際のモデルの識別可能性の検証を行う．

まず，尤度による goodness-of-fitting に関して，比較のため，**3.(1)**で求めた対数最終尤度の平均値の近似曲線を点線で，本節で求めた対数最終尤度の平均値の近似曲線を実線で，それぞれ**図 8** に示す．誤差相関係数σ_{23}がおおよそ 0.50 を下回るとき，データと等しいネスト構造を特定して推定した値とデータと異なるネスト構造を特定して推定した値はほぼ等しいことがわかる．すなわち，goodness-of-fitting の観点から見れば，異なるネスト構造を特定したにも関わらず，σ_{23}が 0.50 付近を下回るときには人工データへのモデルの当てはまり具合はほぼ等しくなっていることから，goodness-of-fitting による判断で，適正なネスト構造を特定できるとは言い難いと言える．

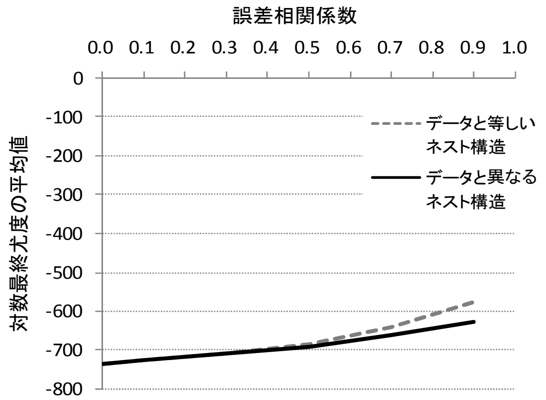

図 8．σ_{23} 毎の対数最終尤度の平均値

次に，スケールパラメータの推定結果について考察を行う．誤差相関係数σ_{23}毎に推定したスケールパラメータ$\hat{\mu}$の分布を**図 9** に示す．ここで，図中の実線は$\hat{\mu}=1$を示す．加えて，σ_{23}毎にスケールパラメータが 1 を下回って推定された回数を**表 2** に示す．この結果から，σ_{23}がおよそ 0.50 を下回るとき，スケールパラメータが 1 を下回って推定される場合も存在することがわかる．

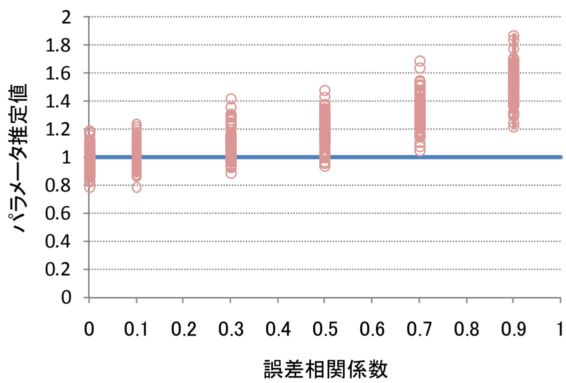

図 9．σ_{23} 毎の $\hat{\mu}$ の分布（異なるネスト構造）

表 2．σ_{23} 毎の $\hat{\mu}$ が 1 を下回った回数（100 回中）

誤差相関係数	0.00	0.10	0.30	0.50	0.70	0.90
回数	61	46	13	4	0	0

以上の結果は，誤差相関係数にして 0.50 未満の弱度の正の相関の下では，真のネスト構造と異なるネスト構造を特定したにも関わらずその違いを識別できない危険性があるという Nested logit model の適用に関する問題が存在することを示唆するものである．

(4) まとめ

以上で述べた結果を踏まえれば，Nested Logit Model の推定精度はデータの誤差構造に依存していることが分かる．しかしながら，前述しているように実測データを用いて推定を行う際にはデータの真の誤差構造は誰にも知り得ないため，分析者は本当に正しい結果が得られているかを知る術がない．従って，分析者が Nested Logit Model を適用する際には，推定結果の正しさ如何に関係なく妥当な推定結果を得たと誤認する危険性があると言うこととなる．

一方で，いずれの検証においても，確定効用部分のパラメータ $\hat{\beta}_1$，$\hat{\beta}_2$ の相対値は設定値を再現できていること，すなわち次式が成り立っていることに着目したい．

$$\frac{\hat{\beta}_1}{\hat{\beta}_2} \cong 2.0 \qquad (8)$$

確定効用部分のパラメータ相対値について，**3.(2)**で得られた結果を**図 13** 及び**表 3** に，**3.(3)**で得られた結果を**図 14** 及び**表 4** に，それぞれ示す．ただし，図中の実線は $\hat{\beta}_1/\hat{\beta}_2$ の設定値，すなわち $\hat{\beta}_1/\hat{\beta}_2 = 2.0$ を示す．

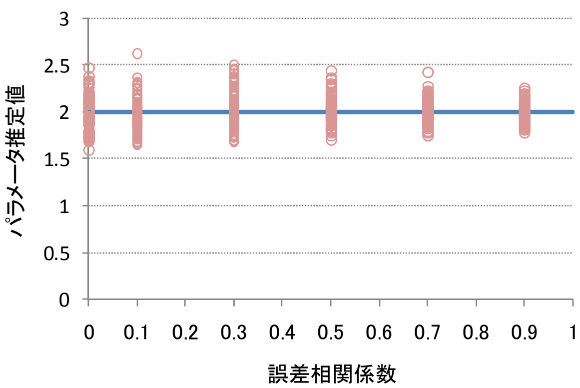

図 13．σ_{23} 毎の $\hat{\beta}_1/\hat{\beta}_2$（人工データと等しいネスト構造）

表 3．$\hat{\beta}_1/\hat{\beta}_2$ の統計量（人工データと等しいネスト構造）

誤差相関係数	0.00	0.10	0.30	0.50	0.70	0.90
平均値	2.00	1.98	2.02	2.03	2.00	1.99
中央値	1.99	1.98	1.98	2.03	2.01	1.97
標準偏差	0.18	0.17	0.18	0.15	0.13	0.10

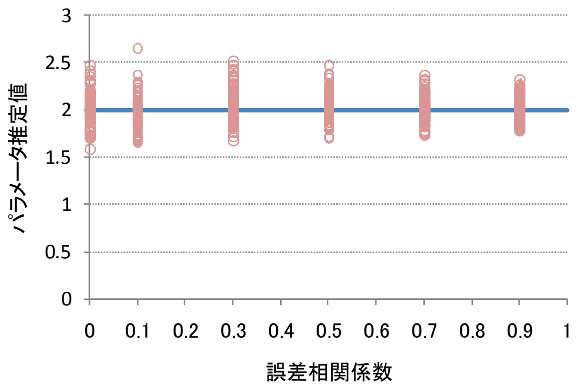

図 14．σ_{23} 毎の $\hat{\beta}_1/\hat{\beta}_2$（人工データと異なるネスト構造）

表 4．$\hat{\beta}_1/\hat{\beta}_2$ の統計量（人工データと異なるネスト構造）

誤差相関係数	0.00	0.10	0.30	0.50	0.70	0.90
平均値	2.00	1.98	2.02	2.03	2.01	1.99
中央値	1.99	1.97	1.99	2.02	2.01	1.98
標準偏差	0.18	0.17	0.18	0.15	0.13	0.12

6．結語と今後の課題

Nested Logit Model はデータの誤差構造と特定した誤差構造に乖離がない場合は，誤差相関の強弱によらずパラメータ設定値付近を推定することができるであろうことが示唆された．しかし，誤差相関係数が 0.50 を下回る程度の弱度の正の相関の下では，適正なネスト構造を統計学的な手法で特定することが困難であろうことも示唆された．ネスト構造を的確に推計できないということはすなわち，誤差構造を統計的に特定することが困難であることを意味している．誤差構造が異なれば，そのモデルを用いて，例えば，モンテカルロシミュレーションに基づく需要予測を行う場合に，一人一人の選択行動が異なった形で予測されてしてしまう事となってしまう．この点を踏まえるなら，不適切な誤差構造を推定してしまった場合，そのモデルを用いた需要予測には，その不適切な誤差構造を起因とした予測誤差が生ずるであると考えられる．Nested Logit Model を用いた需要予測におけるこうした問題は，少なくとも筆者の知る限り，従来においては指摘されておらず，今回の研究で改めて示された問題点であると考えられる．

一方で，推定された確定効用パラメータの相対的な値は，異なるネスト構造を特定した場合でも，誤差相関係数の大きさに関わらず，高い推定安定性を有するという結果が得られた．このことは，パラメータの相対値が実務上求められるような局面（例えば，時間価値の算定など）においては，Nested Logit Model を用いることに実務上の問題が優越することがない可能性を示唆している．

しかしながら，確定効用パラメータの相対的な値に着目するのであれば，IIA Model である Logit Model でも同様の結果が期待できる，と言う点は付言しておく必要があるだろう．したがって，今後は，本研究の様な視点にたった分析アプローチに基づいた Logit Model との比較が必要であろう．また，本研究では他の Non-IIA Model との直接的な比較検証を行っておらず，Non-IIA Model の推定安定性として統括的にまとめる必要があるものと考えられる．

謝辞：

本研究を進めるにあたり，名古屋大学の山本俊行准教授より有用な助言，指摘をいただいた．

参考文献：

1) 北村隆一，森川高行編著; 交通行動の分析とモデリング，技報堂出版，2002.
2) C.R. Bhat：COVARIANCE HETEROGENEITY IN NESTED LOGIT MODELS：ECONOMETRIC STRUCTURE AND APPLICATION TO INTERCITY TRAVEL，*Transportation Research*，**31**(1)，pp.11-21，1997.
3) 清水哲夫，屋井鉄雄：Mixed Logit Model とプロビットモデルの推定特性に関する比較分析，土木計画学研究・論文集，No. 16，pp. 587-590，1999.
4) B.R. Dansie：PARAMETER ESTIMABILITY IN THE MULTINOMIAL PROBIT MODEL，*Transportation Research*，**19**(6)，pp.526-528，1985.
5) Walker, J.: The mixed logit (or logit kernel) model: dispelling misconceptions of identification. *Transportation Research Record*, **1805**, pp.86-98, 2002.
6) Walker, J.L., M. Ben-Akiva and D. Bolduc: Identification of parameters in normal error component logit-mixture (NECLM) models, Journal of Applied Econometrics, 22, pp.1095-1125, 2007.
7) 兵藤哲朗，章翔：Mixed Logit モデルの汎用性に着目した特性比較分析，土木学会論文集，No.660/IV-49, 89-99，2000.
8) Nakai, S. and R. Kitamura: Stability of mixed logit parameter estimation. *HKIE Transactions*, **15**(4), pp.35-43, 2008.
9) 中井周作：Mixed Logit Model の特定可能性に関する研究，京都大学大学院工学研究科修士論文，2006.

Nested Logit Modelのパラメータ推定の安定性に関する研究

菊池輝，明壁佳久，中井周作，藤井聡，北村隆一

本研究では，Non-IIA Modelの中でも，Nested Logit Modelに着目して推定の安定性に関する検証を行った．同一のパラメータ・誤差構造を有する離散選択人工データを複数セット作成して，パラメータ推定値や誤差構造の再現性に着目した考察を行った．結果，人工データと等しいネスト構造を特定した場合には，高い推定精度を有することが示された．しかし，人工データと異なるネスト構造を特定した場合には，誤差相関係数が弱相関の時に，誤ったネスト構造を特定しているにも関わらず，さも妥当な推定結果のように分析者が誤って認識する危険性が示された．

Study on Estimation Stability of Nested Logit Models

By Akira KIKUCHI, Yoshihisa ASUKABE, Shusaku NAKAI, Satoshi FUJII and Ryuichi KITAMURA

The Nested Logit Model is a class of non-IIA discrete choice models that can handle correlation among the alternatives. Although they have been frequently applied in choice analysis, properties of their parameter estimates are not well known. The nested logit estimation exercise on simulated data sets in this study shows that parameter estimates and choice probabilities are stable when the nest structure is identified correctly. However, if another structure is identified and moreover the correlation between error terms is low, scale-parameter estimates are instable.