社会技術研究（印刷中），2005.

リスク評価と非線形期待効用理論

RISK EVALUATION AND NON-LINEAR UTILITY THEORY

竹村和久[1]・藤井 聡[2]・吉川肇子[3]

[1]博士（学術） 早稲田大学教授 文学部（社会技術システム統括研究グループ非常勤研究員）(E-mail: kazupsy@waseda.jp)
[2]博士（工学） 東京工業大学大学院助教授 土木工学専攻（社会技術システム統括研究グループ非常勤研究員） (E-mail: fujii@plan.cv.titech.ac.jp)
[3]博士（文学） 慶應義塾大学助教授 商学部（社会技術システム統括研究グループ非常勤研究員） (E-mail: geg01510@nifty.com)

本論文では，非線形期待効用理論に基づいたリスク評価のための意思決定論的枠組を提供した．本論文では，期待効用理論の考え方を概説して，「被害の確率とその重大さの積」というリスクの定義を期待効用理論で解釈し，次に，期待効用理論における独立性公理は，リスク評価を行う上での規範的な観点からも必ずしも支持できないということを指摘した．独立性公理を緩和した効用理論である非線形効用理論でリスク評価を行えることを筆者らは提唱する．この考えに基づけば，政策決定において，リスクがゼロになることを極めて高く希求するゼロリスク効果や，確率分布のわからない曖昧なリスク事象を忌避するような選好も，予防原則とも整合的であり，いたずらに非合理的とは言えない．すなわち，独立性公理をある程度緩和した条件でのリスク評価も考慮に値すると考えられる．例えば，ショケ積分を用いたランク依存型の非線形効用理論は，独立性公理を逸脱しているが，確率優位性などの合理的な性質も保有しており，今後のリスク評価において用いることができるであろう．また，この非線形効用理論がリスク評価に用いられるとすると，これまでに非合理的とされていた市民の反応も規範的な意味で取り入れることが可能であり，ある程度，市民の価値観や公共的な感情を反映したリスク評価ができることになると考えられる．

キーワード：リスク評価，期待効用理論，予防原則，確率，リスク査定，独立性公理，非線形期待効用理論

1．はじめに

AIDS，鳥インフルエンザ，BSE，SARS などの疾病，地震，台風，津波などの自然災害，さらには，交通事故，発電所事故，火災，犯罪，テロ，戦争と言うような様々なリスク(risk)に，我々は取り囲まれている．このようなリスクの評価の問題は，安全で安心な社会の実現を考える社会技術研究の重要な問題となっている．

リスク評価(risk evaluation)は，リスク解析の一部であるリスク査定(risk assessment) とは異なる含意を持っている．リスク評価とリスク査定との差異は，リスク査定が純粋に科学的な過程であるのに対して，リスク評価には価値の議論が含まれるからである（山本・大坪・吉川，2004[1)]）．リスク査定を基にリスクを技術的な観点から評価し，政策評価に反映する方法の代表がリスク解析(risk analysis)の立場である．リスク解析は，リスクに関する科学的研究から政策決定に至るまでのリスク査定（risk assessment)，リスク管理，リスクコミュニケーションからなるプロセスを経ると指摘されているが，特にリスク査定では，人間の健康，生命への危害とその確率を明らかにしようとする．これに対して，リスク評価では，必ずしもリスク査定を経ないで行われることもあるし，また，リスク査定が行われた後に行われることもある．要するに，リスク評価は，規範的観点からリスクを評価する行為であると言えるだろう．

リスクとはそもそも何であるかについて様々な議論があり（山本・大坪・吉川，2004[1)]），一意な定義は存在しないが，最も基本的なリスクの定義が National Research Council (1989)[2)]による「被害の生起確率と被害の重大性の積」というものである．この定義は，さまざまなリスク研究者によって採用されている（吉川,1999）[3)]．

この定義は，期待効用理論に基づいていると解釈することができる．簡単に述べると，被害の重大性を，死亡者数などの実測値で表現すると，リスクは被害の確率と被害を掛け合わせた「期待値」になり，被害の重大性を死亡者数などの単調増大関数（効用関数）で表現すると，リスクは被害の確率と被害の負の効用を掛け合わせた「期待効用」になるのである．リスク解析研究者の中では，効用関数を用いず，期待値のみでリスクを考える傾向も強いが，期待値は効用関数が線形である場合の期待効用であると解

釈することができるので，リスク解析の多くの立場は，期待効用理論で考えることができる（竹村，2005）[4]．

竹村（2005）[4] は，リスク評価を期待効用理論で捉えられることを指摘し，期待効用理論で捉えたリスク評価ではどのような政策的帰結がもたらされるかを考察した．しかし，竹村・吉川・藤井(2004)[5] が指摘しているように，リスク評価の問題は，期待効用理論のみで捉えることができないような広い含意を持っている．

本論文では，リスク評価を期待効用理論の考える上での問題を指摘し，その問題点を改善する一つのアプローチを示唆することを目的としている．すなわち，本論文では，期待効用理論における独立性公理は，リスク評価を行う上での規範的な観点からも必ずしも支持できないのではないかということをまず指摘する．ここで言う規範的観点とは，「リスク評価がどのようにあるべきか」という価値を含んだ観点であるが，社会的意思決定における合理性を前提にしている．このことは，いわゆる政策決定において，リスクがゼロになることを極めて高く希求するゼロリスク効果や，確率分布のわからない曖昧なリスク事象を忌避したり，あるいは選好したりするような意思決定についても，いたずらに非合理的であると見なすのではなく，市民のリスク評価に取り入れることが望ましいことがあることを示唆している．さらに，この独立性公理を緩和した効用理論である非線形効用理論でリスク評価を行うことを提案し，このことについてのリスク評価上の問題を論じる．

２．効用理論による被害の重大性の把握

効用(utility)は，日常の用法では，選択肢を採択した結果に対する主観的価値あるいは望ましさのことであると解釈されているが，意思決定理論では，選好関係を表現する実数値関数であると操作的に考えることが多い．リスク評価では，効用を望ましさの逆の尺度で考えて，「被害の重大性」であると考えることができる．ここでは，効用の大きさを被害の重大性として，表現することにする（尚，通常の効用の定義のように望ましさから定義しても符号関係が反対になるだけ議論の内容は同じである）．

ここで，効用についての簡単な例を述べてみよう．Ａ地域で起きた自然災害震の被害ａとＢ地域で起きた自然災害の被害ｂのうちどちらかが被害を回避すべきなのかという意思決定を考えてみる．この場合，（負の）効用とは，被害ａを被害ｂより重大である時（すなわち，被害ａを被害ｂより回避しなければならいとき：ａ $\succsim$ ｂ)，また，その時に限り，被害ａの負の効用（ｕ（ａ））が被害ｂの効用（ｕ（ｂ））より高くなるような実数値のことである．すなわち，

$$u(a) \geqq u(b) \quad \Leftrightarrow \quad a \succsim b$$

となる関係が成り立つ場合，重大さの関係（重大さの判断の関係）$\succsim$ は，被害の重大さの効用関数ｕによって表現される．

３．期待効用によるリスクの把握

リスクを「被害の生起確率と被害の重大性の積」というように考えて，被害事象ａの生起確率を $p(a)$，死亡者数のような被害事象ａの被害の客観的な統計値をｘ，被害の重大性をｘの単調増大関数，$u(x)$ とすると，被害ａのリスク Ra は，

$$Ra = p(a)u(x)$$

となる．

このリスクの定義は，下記の仮定のもとでは，被害の結果の期待効用に相当することになる．まず，被害事象ａの余事象の確率を考え，全体集合の確率が１であることと確率の加法性から，その確率は $1-p(a)$ となる．次に，ａの余事象で生起する結果はｙであるとすると，その効用の期待値である期待効用 EU は，

$$EU = p(a)\,u(x) + (1-p(a))\,u(y)$$

となる．ここで，被害事象Ａの余事象では，被害の重大性がなく，ｕ（ｙ）=0 と仮定すると，

$$EU = Ra$$

となり，期待効用ＥＵは，リスクＲａに一致する．すなわち，「被害の生起確率と被害の重大性の積」というリスクの定義は，期待効用で表現することができるのである（竹村，2005[4]）．

このように効用の期待値を考える理論を期待効用理論 (expected utility theory: von Neumann & Morgenstern, 1944[6],1947[7])と呼んでおり，とくに，確率に主観確率を仮定しているものを主観的期待効用理論(subjective expected utility theory: Savage, 1954)と呼んでいる．

リスク解析においては，原子力のリスクなども死亡者数の期待値で表現されて，社会的合意形成の議論がなされる傾向にあるが，効用関数の凹性や凸性を考えると，議論の方向が変化することになる（竹村，2005[4]）．

４．リスクの期待効用理論の前提

リスクを，竹村（2005[4]）の表現に従って，期待

効用理論で形式的に定義してみよう．まず，有限な選択肢の集合をＡとして，その要素を互いに背反な選択肢 $a_1,...a_i,...,a_l$（l は選択肢の数）に整理すると，集合 $A=\{a_1,...,a_i,....a_l\}$ と記述できる．つぎに，この選択肢を採用することによって，生起する結果の集合 $X=\{x_1,...,x_j,..., x_m\}$ を考える．例えば，X の要素は，x_1＝1 万人が死亡する，x_2＝誰も死亡しない，x_3＝２万人死亡する，などである．ある特定の選択肢 a_i を採用すると，ある結果 x_j が出現すると考えられるが，a_i と x_j は一対一に対応しているとは限らない．選択肢 a_i を採用することによって生起する結果 x_j は，少なくとも何らかの状態 $\Theta=\{\theta_1,..,\theta_k,..,\theta_n\}$ に依存していると考えることができ，リスク下の意思決定では，Θ の確率分布がわかっていることになる．結果は，採択した選択肢と状態から結果への関数（写像)，すなわち，$f: A\times\Theta \rightarrow X$ によって決まることになる．ただし，$A\times\Theta=\{(a_i,\theta_k) \mid a_i \in A, \theta_k\in\Theta\}$ である．

このことから，選択肢 $a_j\in A$ のうち，どれを選択するかというリスク下の意思決定問題は，X 上の確率分布 $p_1=[p_{11},p_{12},...,p_{1m}]$, $p_2=[p_{21},p_{22},...,p_{2m}]$, ..., $p_l=[p_{l1},p_{l2},...,p_{lm}]$ のどれを選ぶかという問題に置き換えることができる．このことは，X 上の確率の集合 $P=\{p_1, p_2, ..., p_l\}$ の上に選好関係 $\succ$ を入れた選好構造（$P, \succ$）でリスク下の意思決定を表現できることを意味している．

さらに，リスクをより形式的に定義するために，田村・中村・藤田（1997）[8] の期待効用理論の表現に従って，最初に確率の定義をとりあげ，リスクを再定義してみよう．まず，結果の集合Ｘをまず考える．この集合Ｘの部分集合 E（$E\subset X$）は，X のべき集合(power set)である 2^X の要素である（$E\in 2^X$）．ここで，Ｘのべき集合とは，集合Ｘ の部分集合を全部集めた集合のことであり，2^X であらわされる．

ここで，2^X 上の有限加法的確率測度ｐというものを考える．有限加法的確率測度というのは，簡単に言うと，例えば，$p(\{x_1\})=0.2$ というような，「確率」のことである．2^X 上の有限加法的確率測度ｐは，すべての $E_i, E_j\in 2^X$ に対して，

(1)　$p(X)=1$

(2)　$p(E_i)\geqq 0$

(3)　$E_i\cap E_j=\phi \Rightarrow$

$$p(E_i\cup E_j)=p(E_i)+p(E_j)$$

をみたすような集合関数である．すなわち，(1) 結果の集合Ｘの全体の確率は１であり，(2) Ｘの任意の部分集合 E_i の確率は０以上であり，(3) Ｘの任意の部分集合の積集合，$E_i\cap E_j$ が空集合であれば（すなわち，E_i と E_j の交わりがなければ），E_i と E_j の和集合（すなわち，E_i と E_j を合わせた集合）の確率は，$p(E_i)+p(E_j)$ と等しいという性質を持つことである．

つぎに，2^X 上の有限加法的確率測度（以下，簡単のために，確率測度と呼ぶ）の凸集合 P_X というものを考える．P_X が凸集合とは，$0\leqq\lambda\leqq 1$ かつ任意の p, q が P_X の要素である（$p, q\in P_X$）ならば，$\lambda p+(1-\lambda)q$ も P_X の要素であること（$\lambda p+(1-\lambda)q\in P_X$）を言う．すなわち，任意の２つの結果の確率を混合させても，それが P_X の要素になっていることを言うのである．ここで，$E_i \in P_X$ が有限集合であるとき，$p(E_i)=1$ となる確率測度は，単純（simple）であるといわれる．この単純確率測度は，ギャンブルや籤（くじ）と解釈することができる．したがって，P_X が凸集合であるというのは，籤やギャンブルをある確率 λ と $1-\lambda$ で組み合わせた複合籤や複合ギャンブルも，P_X の要素となっていることであると解釈できるのである．

５．リスクの期待効用理論の公理系

リスクを期待効用理論で捉えて，その公理系を，引き続き，田村ら（1997）[8] の期待効用理論の表現をもとにした竹村（2005）[4] の定義に従って，リスクの概念を表現することにしよう．

まず，P_X は，選択肢の集合と解釈できるので，P_X 上の 2 項関係を考え，すべての $p, q\in P_X$ に対して，

$$p\succ q \quad \Leftrightarrow \quad \Phi(p,q)>0$$

を満たす $P_X\times P_X$ 上の実数値関数 Φ を想定することができる．ここで，$\succ$ は，強選好関係（すなわち，$\forall p, q\in P_X, p\succsim q \wedge not\,(q\succsim p)$ であり，$\succsim$ は弱選好関係である)．

この実数値関数 Φ をもとにして，期待効用理論を，つぎの線形効用モデルから説明する．

リスクの線形効用モデルとは，すべての $p, q\in P_X$ に対して，$\Phi(p,q)=U(p)-U(q)$ となるような P_X 上の線形汎関数(linear functional) U のことである．線形汎関数というのは，以下のように定義できる．P_X を R 上の線形空間とするとき，写像 $U: P_X\rightarrow R$ が次の２つの性質(線形性)をもっているとき，すなわち，

(1)　$\forall p, q\in P_X,\ U(p+q)=U(p)+U(q)$

（2）　$\forall \alpha \in R,\ \forall p \in P_X,\ U(\alpha p)=\alpha U(p)$

が成り立つとき，UはP_Xにおける線形汎関数であると言う．Uが線形であるというのは，別の言い方をすると，すべての$p, q \in P_X$と，すべての$0<\lambda<1$に対して，

$U(\lambda p+(1-\lambda)q)=\lambda U(p)+(1-\lambda)U(q)$となることである．

Uの線形性の定義より，Φは正の定数倍をしても一意性をもつので（すなわち，比例尺度であるので），Uは正の線形変換の範囲で一意性を持つこと（すなわち，間隔尺度であること）がわかる．なぜなら，$U'=\alpha U+\beta\ (\alpha>0)$とすると，$\alpha\Phi(p,q)=U'(p)-U'(q)$となるからである．

選択肢$a_i \in A$のm個の結果$x_j \in X$を，それぞれ，確率p_{ij}で（$\Sigma_j p_{ij}=1$）で生じさせる単純確率測度p_iの効用$U(p_i)$をもとにした線形効用モデルは，$U(x_j)$の期待値を求めていると考えることができる．なぜなら，Uの線形性より，$U(P_i)=\sum_j p_{ij}U(x_j)$となり，$U(p_i)$は$U(x_j)$の期待値を求めていることになるからである．その意味で，この線形効用モデルUで表現されるリスクは，期待効用モデルであると考えることができる．

期待効用理論が成立する必要十分条件はいくつかある．ジェンセン（Jensen,1967[9]）の公理系が一般に引用されることが多いので，以下に示すことにする．なお，下記の公理系は，上に定義した，すべての$p, q \in P_X$と，すべての$0<\lambda<1$に対して，成立するものとする．

公理Ａ１（順序公理）P_X上の$\succ$は弱順序である．

ただし，選好関係$\succ$が弱順序であるとは，（1）非対称性　$p \succ q \Rightarrow not\ (q \succ p)$, (2)負推移性 $not\ (p \succ q) \wedge not (q \succ r) \Rightarrow not (p \succ r)$，が成立することである．また，このことは，弱選好関係$\succsim$が (1) 推移性　$p \succsim q \wedge q \succsim r \Rightarrow p \succsim r$，(2) 比較可能性　$\forall p, q \in P_X,\ p \succsim q \vee q \succsim p$ が成り立つことと等価である．

公理Ａ２（独立性公理）　$p \succ q$ならば$\lambda p+(1-\lambda)r > \lambda q+(1-\lambda)r$である．

公理Ａ３（連続性公理）　$p \succ q$ かつ $q \succ r$ ならば　ある$\alpha,\beta \in (0,1)$が存在して，$\alpha p+(1-\alpha)r \succ q$かつ　$q \succ \beta p\ (1-\beta)$ rである．

期待効用理論に基づくリスクの定理

公理Ａ１，Ａ２，Ａ３が成り立つとき，また，そのときに限り，P_X上の線形汎関数U，すなわちリスクUが存在して，すべての$p, q \in P_X$に対して，

$p \succ q \Leftrightarrow U(p)>U(q)$が成立する．また，Uは正の線形変換の範囲で一意性を持つ（Uは間隔尺度である）．

公理Ａ２の独立性公理は，Uが線形であるために必要十分な条件であり，公理Ａ３の連続性公理は，UがP_Xが実数の集合への写像となるために必要な公理である．特に，独立性公理は，期待効用理論において重要な性質であるが，この公理からの逸脱が，後に示すアレのパラドックスやエルスバーグのパラドックスが生じさせていると解釈できる．独立性公理は，ある２つの選択肢の選好関係が定まっている場合，それらの選択肢に結果が等価であり各結果を得る確率が等しい別のギャンブルをそれぞれ複合した場合にも，それらの選択肢の選好関係は保存されることを意味している．

６．期待効用理論によるリスク評価の問題点

このようなリスクの期待効用理論は，規範的にも正当化されるのであろうか．アレ(Allais,1953[10])のパラドックスやエルスバーグ(Ellsberg,1961[11])のパラドックスと呼ばれる現象は，期待効用理論の反例となっており，先に示した期待効用理論の独立性公理を逸脱していることになる．これらの反例は，記述的な意味での期待効用理論の反例とされることが多いが，規範的には独立性公理を逸脱することが正当化できる場合もあり得ると考えられる．下記に，２つのパラドックスを紹介する．

（1）アレのパラドックス

アレ（Allais,1953[10]）は，期待効用理論の反例を挙げている（竹村,1996[12]）．これは、次のような意思決定問題で例示することができる．まず問題１は，選択肢ＡとＢとの選択である．選択肢Ａを選ぶと，確実に100万ドルがもらえる．選択肢Ｂは，10%の確率で500万ドル，89%の確率で100万ドル，1パーセントの確率で０ドル（賞金なし）になる「籤（くじ)」である．ＡとＢとを比べると，多くの人は，確実に賞金をもらえるＡを選好するだろう．つぎに，問題２では，２つの籤，すなわち，100万ドルを11%の確率で得られる選択肢Ｃと500万ドルを10%の確率で得られる選択肢Ｄを考えてみる．この場合は，多くの人は，ＣよりＤを選好するだろう．しかし，この結果は，期待効用理論の独立性公理に明らかに矛盾する．アレのパラドックスは，心理実験において，多くの被験者によって示されることがわかっており(Slovic, & Tversky, 1974[13]; Tversky & Kahneman, 1992[14]），心理学的には，確実な利得を不確実な利

得よりも高く選好するという確実性効果(certainty effect)によって生じると考えられている．さて、このような確実性効果を示す人間を,「非合理的」と言うことができるのだろうか．確実性効果は，ゼロリスク効果のひとつの原因として考えられることがあり（中谷内，2004[15]），非合理的な意思決定現象であると考えられることもある．しかし，安全性や確実性をより強く選好するという独立性公理からの逸脱現象は，多くの人々が納得する性質であり，規範的な観点からも必ずしも否定されるべきものとは考えられない．

（２）エルスバーグのパラドックス

エルスバーグ(Ellsberg，,1961[11])は，結果の確率分布が未知な場合の曖昧さに関する選好を具体例で表現し，期待効用理論の反例を挙げている（竹村,1996[12]）．彼の提示したパラドックスに従い，次のような状況を考える. ある壷の中に合計 90 個の玉が入っており，そのうち，赤玉が 30 個，黒玉と黄玉が合わせて 60 個であることがわかっているが, その構成比率はわからない．この壷から 1 個の玉を取り出すとする．次の意思決定問題を考えてみる．問題１では，選択肢 A では，赤玉（r）が出れば 100 ドルをもらえ，それ以外では何ももらえない賭，別の選択肢 B では，黒玉（b）が出れば 100 ドルをもらえ，それ以外だと何ももらえない賭である．両選択肢を比較すると，多くの人々は，B よりも A を選好するだろう($A \succ B$)．次に，問題２では，選択肢 C では，赤玉か黄玉(r or y)が出れば 100 ドルもらえ，それ以外だと何ももらえない賭, 他方の選択肢 D では，黒玉か黄玉(b or y)が出れば 100 ドルをもらえ，それ以外だと何ももらえない賭である．この場合，多くの人々は，C より D を選好するだろう($D \succ C$).

しかし，この選好の結果は，背反な事象の和事象の確率が各事象の確率の和に等しいという，確率の加法性を仮定する期待効用理論に明らかに矛盾する. すなわち，問題 1 での選好($A \succ B$)は，赤玉を取り出す確率$P(r)$が黒玉を取り出す確率$P(b)$より高いこと（$P(r) > P(b)$）を意味し，問題２での選好($D \succ C$)は，赤玉か黄玉を取り出す確率（$P(r \cup y)$）が黒玉か黄玉を取り出す確率（$P(b \cup y)$）よりも低いことを意味している（$P(r \cup y) < P(b \cup y)$）．ｒとｙ，ｂとｙは互いに背反な事象なので確率の加法性を仮定すると，$P(r \cup y) = P(r) + P(y)$，$P(b \cup y) = P(b) + P(y)$となる．このことから，問題２での選好($D \succ C$)は，$P(b) > P(r)$を意味し，問題１での選好からの帰結$P(r) > P(b)$と明らかに矛盾する．このエルスバーグパラドックスは，期待効用理論における独立性公理からの逸脱を示していると解釈することができる．このエルスバーグのパラドックスの心理的原因として，意思決定者が曖昧さを避けようとする曖昧性忌避(ambiguity aversion)が考えられている．すなわち，この性質は，結果の確率が不明の場合は，人々は曖昧さを嫌ってその曖昧な選択肢の選択を避けるという性質である．このような曖昧さを避けるという志向性は非合理的であるとは必ずしも言えないであろう．

７．独立性公理とパラドックスとの関係

アレやエルスバーグのパラドックスは，期待効用理論における独立性公理からの逸脱で説明することができる．アレのパラドックスは，リスク下の意思決定のパラドックスであるので自然の状態の確率分布がわかっている場合であり，エルスバーグのパラドックスは，一般には自然の状態しかわかっていない場合であるので，不確実性下の問題になる．

リスク下の意思決定の場合，独立性公理は，任意の確率分布ｐ，ｔ，ｒに対して，$p \succ t$ならば，確率分布ｐとｒの凸結合（$\lambda p + (1-\lambda) r$）と，ｔとｒの凸結合である$\lambda t + (1-\lambda) r$との選好関係も同じになることを要請するものである．すなわち，すべての確率分布$p, t, r \in P_X$と，すべての確率 $0 < \lambda < 1$に対して，

$$p \succ t \Rightarrow \lambda p + (1-\lambda) r \succ \lambda t + (1-\lambda) r$$

である．したがって，独立性公理が成立しないのは，すなわち，ある確率分布$p, t, r \in P_X$と，ある確率 $0 < \alpha < 1$が存在して，$p \succ t$であるにもかかわらず，$\alpha q + (1-\alpha) r \succsim \alpha t + (1-\alpha) r$ が成り立つことになる（田村・中村・藤田,1997[8]）．

アレのパラドックスの場合は，問題 1 で，選択肢Ａを選ぶと，確実に 100 万ドルがもらえ，選択肢Ｂでは，10%の確率で 500 万ドル，89%の確率で 100 万ドル，1 パーセントの確率で 0 ドル（賞金なし）になる「籤（くじ)」を選ぶことになる. 選択肢Ａは, 10%の確率で 100 万ドル, 89%の確率で 100 万ドル, 1パーセントの確率で 100 万ドルと分解できるので, ＡとＢに共通することは, 100 万ドルが 89 パーセントの確率で少なくとも得られることである. ここで, 選択肢Ａをｐ，選択肢Ｂを q で表現し，500 万ドルを 11 分の 10 の確率で何も得られない確率を 11 分の 1 の籤 t で表現すると，

$$p = 0.11 p + 0.89 p, \quad q = 0.11 t + 0.89 p$$

と表現できる. したがって, 独立性公理からは，$p \succ$

t ならば $p \succ q$ となる．

また，問題２では，２つの籤，すなわち，100 万ドルを 11%の確率で得られる選択肢Ｃと 500 万ドルを 10%の確率で得られる選択肢Ｄであるが，ＣとＤに共通することは，何も得られないということが少なくとも 89 パーセントの確率はあるということである．選択肢Ｃをｒ，選択肢Ｄをｓで，そして，確実に何も得られないという籤を t'で表現すると，

ｒ＝0.11 p + 0.89 t'，　ｓ= 0.11 t + 0.89　t'

と表現できる．したがって，独立性公理からは，$p \succ t$ ならば $r \succ s$ となる．以上をまとめると，独立性公理からは，$p \succ t$ ならば $p \succ q$ かつ $r \succ s$ となり，$t \succ p$ ならば $q \succ p$ かつ $s \succ r$ をとることが要請される．しかし，実際の選択においては，$p \succ q$ かつ $s \succ r$ を被験者が表明しており(Slovic & Tversky, 1974[13])，独立性公理を満たしていないことがわかる．

また，不確実性下における独立性公理は以下のようになる（田村他,1997[8]）．まず，Ｘを結果の集合，Θを自然の状態の集合，A⊆Θを事象，２つの選択肢をｆ：Θ→Ｘ，ｇ：Θ→Ｘとする．独立性公理は，任意の $\theta \notin A$ に対して，$f(\theta)=g(\theta)$ ならば，ｆとｇの選好関係はＡの余事象 A^c に依存しないということを要請する．したがって，独立性が成立しないということは，以下のようになる．すなわち，ある選択肢ｆ，ｇ，ｆ'，g'　が，ある事象Ａに対して，$\theta \in A$ ならば $f(\theta)=f'(\theta)$，$g(\theta)=g'(\theta)$ であり，$\theta \notin A$ ならば，$f(\theta)=g(\theta)$ かつ $f'(\theta)=g'(\theta)$ であるとき，$f \succ g$ であるにもかかわらず $g' \succsim f'$ となることになる．

このことをエルスバーグのパラドックスで説明してみよう．ある壷の中に合計 90 個の玉が入っており，そのうち，赤玉が 30 個，黒玉と黄玉が合わせて 60 個であることがわかっているが，その構成比率はわからない．この不確実性下の意思決定問題で，意思決定者は何らかの主観的確率 p を構成すると仮定する．問題１では，選択肢 A が，赤玉（r）が出れば 100 ドルをもらえ，それ以外，すなわち，黒玉（b）または黄玉（y）では何ももらえない賭，別の選択肢 B が，黒玉（b）が出れば 100 ドルをもらえ，それ以外だと何ももらえない賭である．選択肢Ａをｆ，選択肢Ｂをｇと表現すると，

ｆの期待効用＝p（ｒ）u (100)　+ p (b∪ｙ) u(0)

ｇの期待効用＝ｐ（ｂ）u(100) + p (r ∪ｙ) u(0)

となる．エルスバーグのパラドックスでは，$f \succ g$ なので，

$$f \succ g \Leftrightarrow f\text{の期待効用} > g\text{の期待効用}$$

$$\Leftrightarrow p(r)\,u(100) + p(b \cup y)\,u(0) > p(b)\,u(100) + p(r \cup y)\,u(0)$$

また，ｐは確率なので背反な事象に関して加法性が成り立ち，かつ u(100)＞ u(0)と仮定できるので，

$$f \succ g \Leftrightarrow p(r)\,u(100) + p(b)\,u(0) + p(y)\,u(0) > p(b)\,u(100) + p(r)\,u(0) + p(y)\,u(0)$$

$$\Leftrightarrow p(r)\,u(100) + p(b)\,u(0) - p(b)\,u(100) - p(r)\,u(0) > 0$$

$$\Leftrightarrow (p(r) - p(b))(u(100) - u(0)) > 0$$

$$\Leftrightarrow p(r) > p(b)$$

である．

同じように，問題２では，選択肢 C が，赤玉か黄玉(r or ｙ)が出れば 100 ドルもらえ，それ以外だと何ももらえない賭，他方の選択肢 D が，黒玉か黄玉(b or y)が出れば 100 ドルをもらえ，それ以外だと何ももらえない賭である．選択肢Ｃをｆ'，選択肢Ｄをｇ'で表現すると，選好は $g' \succ f'$ になるので，

$$g' \succ f' \Leftrightarrow p(b) > p(r)$$

が成立しなければならない．このことは，$p(r) > p(b)$ と明らかに矛盾しており，$f \succ g$ と $g' \succ f$ が同時に成立しないことを示している．また，このことは，期待効用理論では主観的確率をどのように設定してもエルスバーグのパラドックスが説明できないことを示している．

また，エルスバーグのパラドックスが，不確実性下の意思決定における独立性公理を満たしていないことは，表 1 より明らかである．すなわち，独立性が成立しないということは，ある選択肢 f, g, f', g' が，ある事象Ａ（赤または黒）に対して，$\theta \in A$ ならば（ｓが赤または黒ならば），$f(\theta)=f'(\theta)$，$g(\theta)=g'(\theta)$ であり，$\theta \notin A$ ならば（θ が黄ならば）$f(\theta)=g(\theta)$ かつ $f'(\theta)=g'(\theta)$ であるとき，$f \succ g$ であるにもかかわらず $g' \succsim f'$ となることになる．エルスバーグのパラドックスは，$f \succ g$ であるにもかかわらず $g' \succ f'$ を示しているので独立性公理を満たしていないことになる．

表１　エルスバーグのパラドックスと自然の状態

	自然の状態		
選択肢	赤（r）	黒（b）	黄（y）
f	100 ドル	0 ドル	0 ドル
g	0 ドル	100 ドル	0 ドル
f’	100 ドル	0 ドル	100 ドル
g’	0 ドル	100 ドル	100 ドル

８．独立性公理の逸脱の擁護と予防原則

アレのパラドックスも，エルスバーグのパラドックスも独立性公理が経験的には成り立たないことから生じると解釈される．心理学的には，アレのパラドックスは，確実性を好む確実性効果，エルスバーグのパラドックスは曖昧性を回避する効果から説明できる（竹村,1996[12)]）．

アレのパラドックスも，エルスバーグのパラドックスも，人間の意思決定の非合理性を示すものとして取り上げられることが多い．しかし，これらのパラドックスは，人間の意思決定の非合理性を示すものであり，規範的には全く支持できないのであろうか．我々は，このようなパラドックスもある意味では規範的に支持できるものと考える．そもそも，数理モデルに仮定される加法性や独立などは規範的であることを示唆するが，規範的かどうかは，最終的には人々が規範的であるかどうかという判断に依存すると考えるのである．

まず，アレのパラドックスは，ゼロリスク効果と同型である．例えば，交通事故死亡確率を 56%から 55%に減らすのに 10 億円かけるのは無駄だと感じるのに，１%から０%に 10 億円かけるのは受容するという判断はゼロリスク効果を示しているが，このような判断は非合理的であり，規範的に本当に支持できないのであろうか．この現象も明らかに独立性公理から逸脱するが，しかし，このような判断がリスク評価にあたって規範的に支持できないとは言えないと考える．交通事故の死亡確率がゼロになることは極めて望ましいからである．別の例で言うと，多くの国では，天然痘や AIDS などの疾病の根絶を願って，様々な対策をとっているが，このような危険な疾病を根絶するということに高い価値を置く営みは，規範的に支持できると考えられるのである．リスク評価が人々の価値を含んでいるとするならば，ゼロリスク効果を示す判断も規範的に支持できる部分があると考えられるのである．規範が社会的に決定されるもの，あるいは社会的に合意された上で形成されるものと考えるならば,「何が規範か」という議論は，すぐれて社会的である．したがって，リスク評価が人々の価値を含んでいるとするならば，ゼロリスク効果を示す判断も規範的に支持できる部分があると考えられるのである．

同様にエルスバーグパラドックスについて考えてみよう．確かに曖昧性忌避あるいは曖昧性選好も，独立性公理からの逸脱であると解釈することができる．しかし，このような判断現象も直ちに非合理的であるとは考えられない．例えば以下の状況を考えてみよう．AIDS や BSE 発見の初期段階のように未知の疾病 A が発生するとする．また，結核や天然痘のように発生機構が既知であり発生確率も既知である疾病 B も発生しているとする．政府は，どちらの疾病の対策を優先して税金をより多く投入するかの決断に迫られているとする．疾病 A が発生すると 1 万人の死亡者が想定でき，疾病 B でも 1 万人の死亡者が想定できるとする．ここで，疾病 A ならびに疾病 B が発生しないと，死亡者はゼロだと想定する．このとき，未知の疾病 A の方が重大であると判断され研究費や新薬開発の税金を優先的に投入することはよく行われることである．

またこのような重大性の判断は社会的規範の観点から間違っているとは言えない．このことを重大さの期待効用で考えると（すなわち負の効用で考えると），疾病 A のほうが疾病 B よりも重大性が高く評価されるので，

p（疾病 A が発生）u（1 万人が死亡）＋（１－p（疾病 A が発生））u（０人が死亡）＞p（疾病 B が発生）u（1 万人が死亡）＋（１－p（疾病 B が発生））u（０人が死亡）

⇔

p（疾病 A が発生）(u（1 万人が死亡）－u（０人が死亡））＞p（疾病 B が発生）(u（1 万人が死亡）－u（０人が死亡））

さらに，u は負の効用なので，u（1 万人が死亡）－u（０人が死亡））＞０であるから

⇔

p（疾病 A が発生）＞p（疾病 B が発生）

となり，疾病 A の発生確率を疾病 B の発生確率より高く見積もっていることになる．

他方，疾病 A ならびに疾病 B が発生しないと，国民の声で税金をこれ以上投入する必要がないとして，やむを得ず研究施設の削減を求められるとする．しかし，仮に識者によると，研究施設の削減は医学的見地から望ましくないことであるとされて

いるとする．また，疾病が発生するとそのような国民の声は無いので，研究施設は現状維持であるとする．この場合，疾病 A に関する研究施設の削減の方が疾病 B に関する研究施設の削減に比べて重大な問題であると考えることは，規範的観点からも必ずしも間違っているとは言えず，また，先の疾病による死亡の重大性判断の結果とも整合しないとは思われない．したがって，

p（疾病 A が発生）u（現状維持）＋（１－p（疾病 A が発生））u（施設の削減）
＞p（疾病 B が発生）u（現状維持）＋１－p（疾病 B が発生）u（施設の削減）
⇔
p（疾病 A が発生）（u（現状維持）－u（施設の削減））＞p（疾病 B が発生）（u（現状維持）－u（施設の削減））

となる．ここで，現状維持のほうが施設の削減よりも政府にとって負の効用が低いと考えられるので，
（u（現状維持）－u（施設の削減））＜０
となるので，

⇔　－p（疾病 A が発生）>－ p（疾病 B が発生）
⇔
p（疾病 A が発生）＜ p（疾病 B が発生）

となり，先の死亡者の重大性判断のときと，確率評価の矛盾が生じる．この矛盾は，期待効用理論の独立性公理を仮定しているから矛盾となるのであるが，リスク評価として間違っているとは言えないと考えられる．

このように確率分布のわからない危険に対して，忌避するような対策は，欧州圏やカナダを中心にして提案されている，いわゆる予防原則（precautionary principle）あるいは予防的アプローチ(precautionary approach）とも整合的である．予防原則や予防的アプローチというのは，人間や社会に重大な危害を与えると判断できる可能性があり，リスク査定が行われた結果，必ずしも科学的にリスク事象の確率分布やその発生機序が不明な場合の対策を問題としているのである．公共的観点から予防的に規制した方がよいと判断出来る場合に，すなわち，確率分布のわからないリスク事象を忌避するような対策ととることは，独立性公理を逸脱しているが，非合理であるとか，規範的に支持できないとは言えないのである．

９．非加法確率と非線形効用理論

このように期待効用理論における独立性公理が必ずしもリスク評価の規範的観点から支持できない場合があることを指摘したが，独立性公理を逸脱しているが，ある程度規範的にも許容できる意思決定理論として非線形効用理論の体系がある．筆者らは，この非線形効用理論の体系のもとでのリスク評価も規範的に許容できることを主張したい．

非線形効用理論の体系では，アレのパラドックスの場合のようにリスク下の意思決定では，確率情報が与えられても加法性が成立しないような確率を変換する非加法的な確率加重関数を考える．また，エルスバーグのパラドックスの場合は，自然の状態に対する主観的な信念の測度に加法性が成立しない非加法的確率として定式化を行う．

非加法的確率は，そもそも物理学の分野で使われたので容量(capacity)という表現がなされることもあるが，工学の分野ではファジィ測度(fuzzy measure)と呼ばれる．呼び名は異なるが，数学的な定義は同じである．非加法的確率とは，以下の条件を満たす，非空な集合Ωの部分集合からなる集合体から閉区間[0,1]への集合関数 $\pi : 2^{\Omega} \rightarrow [0,1]$ である．すなわち，有界性の条件（$\pi(\phi)=0$，$\pi(\Omega)=1$）と単調性の条件（Ωの部分集合 E，Fが，$E \subseteq F$ という関係ならば $\pi(E) \leqq \pi(F)$ という関係を満たす）である．非加法的確率は，加法性の条件を必ずしも満たさないのでその名がつけられている．

エルスバーグの問題においても，確率の評価に，有界性の条件，$p(\phi)=0$，$p(r \cup b \cup y)=1$ を仮定し，さらに，単調性の条件を仮定すると，必ずしもパラドックスは生じない．単調性の条件より，$p(r \cup b \cup y) > p(b \cup y) > p(r) > p(\phi)$ などの関係は満たさなければならないが，例えば，$p(r)=1/3$，$p(b \cup y)=2/3$，$p(b)<1/3$，$p(r \cup y)<2/3$，としても非加法的確率の条件は逸脱していない．この場合，エルスバーグの問題１と２とにおいて，矛盾は生じていないことになる．ただし，この時，この非加法的確率は，$p(y)+p(b)<p(y \cup b)$，$p(y)+p(r \cup b)<p(y \cup r \cup b)$ という劣加法性の条件を条件を満たしていることになる．

期待効用理論においては，期待効用最大化基準は，確率測度に関するルベーグ(Lebesgue)積分の観点から捉えることができるが，上に定義したような非加法的確率に関する期待効用に関しては，ルベーグ積分以外のいくつかの積分表示の仕方がある．工学のファジィ測度論の分野ではファジィ積分という積分の観点からのいくつかの積分表示がなされている（菅野・室伏,1993[16]）．この中で，非線形効用理論やファジィ理論の研究者が精力的に研究しているのが，ショケ積分(Choquet,1955[17])による期待効用であ

る．この積分による期待効用理論は，ランク依存効用理論(rank dependent utility theory)とも呼ばれている．

ショケ積分による期待効用は，以下のように示すことができる(Quiggin, 1993[18];Camerer,1995[19])．まず，自然の状態$\theta_i \in \Omega$が，選択肢ｆによる結果$f(\theta_i)$に対する効用$u(f(\theta_i))$に応じて，$u(f(\theta_1)) > u(f(\theta_2))... > u(f(\theta_n))$のように順位づけられているとする．非加法的確率ｐに関する有限集合上のショケ積分による期待効用は,

$$u(f(\theta_1))p(\theta_1)+\sum_{i=2}^{n} u(f(\theta_i))\left[p\left(\bigcup_{j=1}^{i}\theta_j\right) - p\left(\bigcup_{j=1}^{i-1}\theta_j\right)\right]$$

である．もしｐが加法的測度であり，自然の状態θ_jが互いに背反であれば，上の期待効用は，主観的期待効用理論によるものと一致する(Camerer,1995).

ショケ積分による期待効用の表現は，ファジィ理論の体系や期待効用理論の体系の中でも扱われているが，プロスペクト理論(Kahenaman & Tversky, 1979[20]; Tversky & Kahneman, 1992[14])と呼ばれる意思決定の心理学的記述理論の体系においても，用いられている．実際，Geiger(2005)[21]の理論的研究のように，プロスペクト理論における様々な概念を用いて，リスクの受容のあり方を理論的に説いている研究も現れており，非線形期待効用理論を用いたリスク評価は今後行われる方向にあると言えるだろう．

１０．結論と今後のリスク評価

本論文では，期待効用理論の考え方を概説して，「被害の確率とその重大さの積」というリスクの定義を期待効用理論で解釈した．次に本論文では，期待効用理論における独立性公理は，リスク評価を行う上での規範的な観点からも必ずしも支持できないのではないかということをまず指摘した．政策決定において，リスクがゼロになることを極めて高く希求するゼロリスク効果や，確率分布のわからない曖昧なリスク事象を忌避するような選好も，予防原則とも整合的であり，いたずらに非合理的とは言えないのである．すなわち，独立性公理をある程度緩和した条件でのリスク評価もあってよいのではないかということを筆者らは指摘した．

この独立性公理を緩和した効用理論である非線形効用理論でリスク評価を行えることを筆者らは指摘した．例えば，ショケ積分を用いたランク依存型の非線形効用理論は，独立性公理を逸脱しているが，確率優位性などの合理的な性質も保有しており，今後のリスク評価において用いることができるであろう．また，この非線形効用理論がリスク評価に用いられるとすると，これまでに非合理的とされていた市民の反応も規範的な意味で取り入れることが可能であり，ある程度，市民の価値観や公共的な感情を反映したリスク評価ができることになると考えられる．

しかし，非線形効用理論の体系でもリスク評価における限界がある．例えば，標本空間が無知な場合の意思決定現象（Smithson,, Bartos, ＆ Takemura,2000[22]）や，意思決定問題の記述の仕方によって選好が変化するというフレーミング効果（竹村,1996[12]）などは，非線形期待効用理論では説明が不可能である．筆者らはこのような非線形効用理論からの逸脱現象もある場合には規範的に擁護できることがあると考えている．

最後に，本論文の提案の限界について述べる．ここまでの議論は，説明の可能性，すなわち試論にとどまっており，具体的にどのようなリスク評価が望ましいのかという具体的な施策への提案を含むものではない，今後はこの説明の妥当性を検証しつつ，リスク評価のあり方について，具体的にどのような提案が可能か検討していくことを課題としたい．

引用文献

(1) 山本明・大坪寛子･吉川肇子　（2004）「リスクおよび関連概念における定義の不一致に見る論点」『リスク研究学会誌』，15，45－53.

(2)National Research Council (1989)　*Improving risk communication*. Washington, DC: National Academy Press.　林裕造・関沢純　（監訳）　『リスク・コミュニケーション』化学工業日報社

(3)吉川肇子（1999）　『リスク・コミュニケーション』　福村出版

(4)竹村和久（2005）「リスク評価と期待効用理論」『同志社大学ヒューマン・セキュリティ研究センター年報』，**2**，197－213.

(5)竹村和久・吉川肇子・藤井聡（2004）「不確実性の分類とリスク評価－理論枠組の提案―」『社会技術研究論文集』，　**2**，　12－20.

(6) von Neumann,J., and Morgenstern,O. (1944), *Theory and games and economic behavior.* Princeton,NJ: Princeton University Press.

(7) von Neumann,J., and Morgenstern,O. (1947), *Theory and games and economic behavior, 2nd ed.* Princeton,NJ: Princeton University Press.

(8) 田村坦之・中村　豊・藤田眞一　(1997)　『効用分析の数理と応用』　コロナ社

(9) Jensen,N.E. (1967)　An introduction to Bernoullian utility theory. Ⅰ.Utility functions. *Swedish Journal of Economics*, **69**, 163-183.

(10)Allais,M. (1953)　Le comportement de l'homme rationnel devant le risque, critique des postulates et axiomes de l'ecole americaine. *Econometrica*, **21**, 503-546.

(11) Ellsberg, D.　（1961）　Risk, ambiguity, and the Savage axiom. *Quarterly Journal of Economics,*　**75,**　643-669.

(12) 竹村和久　(1996) 「意思決定とその支援」　市川伸一（編）　『認知心理学４巻 思考』　東京大学出版会　Pp.81-105.

(13) Slovic,P. and Tversky,A. （1974）　Who accepts savage's axiom？　*Behavioral Science*, **19**, 368-373.

(14) Tversky,A., and Kahneman, D.(1992), Advances in prospect theory: Cumulative representation of uncertainty. *Journal of Risk and Uncertainty*, **5**, 297-323.

(15) 中谷内一也（2004）『ゼロリスク評価の心理学』ナカニシヤ出版

(16) 菅野道夫・室伏俊明　（1993）　『講座ファジィ 3 ファジィ測度』　日刊工業新聞

(17) Choquet,G. (1955) Theory of capacities,　*Annales de l'Institute Fourier"*, **5**, 131-295.

(18) Quiggin,J. (1993) "*Generalized expected utility theory: The rank dependent model."* Boston: Kluwer Academic Publishers.

(19) Camerer, C.F. (2000)　Prospect theory in the wild: Evidence from the field. In D. Kahneman and A. Tversky (Eds.), *Choices, values, and frames,* New York, NY: Cambridge University Press,pp.288-300.

(20) Kahneman, D., and Tversky, A. (1979) "Prospect theory: An analysis of decision under risk", *Econometrica,* **47,** *263-291.*

(21) Geiger,G.(2005) Risk acceptance from non-linear utility theory. *Journal of Risk Research,* **8**, 225-252.

(22) Smithson, M., Bartos, T., and Takemura, K. （2000） Human Judgment under sample space ignorance. *Risk , Decision and Policy,* **5**,35-150.

謝辞

本研究を進めるにあたり，東京大学大学院工学研究科堀井秀之教授から有益なご助言を賜った．

社会技術研究（印刷中），2005.

RISK EVALUATION AND NON-LINEAR UTILITY THEORY

Kazuhisa TAKEMURA [1], Satoshi FUJII [2], Toshiko KIKKAWA [3]

[1] Ph.D.（System Science）Professor, Waseda University, Dept. of Psychology(E-mail: kazupsy@waseda.jp)
[2] Ph.D.（Engineering）Associate Professor, Tokyo Institute of Technology, Dept. of Civil Engineering (E-mail: fujii@plan.cv.titech.ac.jp)

[3] Ph.D.(Letters）Associate Professor, Keio University, Dept. of Commerce, (E-mail: geg01510@nifty.com)

We propose a framework of the non-linear utility theory for the evaluation of several risks in society, and discuss on the theoretical consequences on the risk communication policy and the social decision making. Many risk analysts tend to use expected values of negative events in order to assess risk. Especially, the expected values (or the expected probabilities of each individual negative event) tend to be used in order to evaluate risk for natural disasters, nuclear power plants, and other new technologies. The expected utility theory postulates that one will avoid the prospect with the lowest expected utility value (highest risk), which is a nonlinear function of the outcome. von Neumann and Morgenstern (1944,1947) gave an axiomatic basis to the expected utility rule with the exogenously given probabilities. This associates the formal incorporation of risk and uncertainty with the risk evaluation. The expected utility analysis for the risk evaluation would be useful for risk evaluation. However, the traditional expected utility theory has a limitation for normative decision making. We conclude that there are the cases (such as Allais (1953) paradox and Ellsberg (1961) paradox) in which several axioms of the expected utility theory are not accepted for normative decision making. Therefore, we propose to apply the non-linear utility theory for the evaluation of risks especially for natural disasters, nuclear power plants, and other new technologies. Although other decision theories under ignorance may be useful for the risk evaluation in the cases where axioms of the non-linear utility theory do not hold, we conclude that the non-linear utility analysis for risk evaluation is still useful and should be undertaken in order to improve risk communication between the citizens and the experts.

Key Words: Risk evaluation, expected utility theory, precautionary principle, probability, risk assessment, independence axiom, and nonlinear utility theory.