

一般対応法則と意思決定論

竹村和久¹ ・ 藤井 聡²

(¹: 早稲田大学文学学術院, ²: 東京工業大学大学院理工学研究科)

1. はじめに

動物や人間を含めた個体の選択行動研究において, 選択反応率とその反応によって得られる強化子数が対応するという対応法則(matching law)が概ね成立するとされている(Hemstein, 1961; Mazur, 1998; 坂上, 1997). オリジナルの対応法則では, 反応バイアス, 過大対応, 過小対応などを説明するうえで問題があるので, 対応法則を拡張した一般対応法則が提案されており(Baum, 1974, 1979), 一般対応法則の説明可能性は比較的高い. 対応法則や一般対応法則がなぜ成立するのかということについて, いろいろな論争があったが, 十分な理論的な決着はついていない(Mazur, 1998; 坂上, 1997). 本論文では, 一般対応法則について解説し, 近年の我々の研究における一般対応法則に関する理論的研究(藤井・竹村, 2001; Fujii & Takemura, 2002; Takemura & Fujii, 2004)の経緯を紹介し, 意思決定理論と一般対応法則がどのような関係にあるのかを検討する.

2. 一般対応法則とは何か

一般対応法則の元になる対応法則は, Hemstein(1961)によって, 提唱されている(Mazur, 1999). 彼は, ハト用実験箱を用いて, 並立の変動時隔(VI)強化スケジュールにおいてハトの選択行動を研究した. この研究では, 例えば, 2羽のハトは, 左キーへの選択反応をVI135秒スケジュールで, 右キーについては, VI270秒スケジュールで強化される訓練を受けた. VI135秒スケジュールというのは, 選択反応をしてから平均135秒の時間間隔を置いてから強化子が与えられる訓練の形式であり, VI270秒スケジュールというのは, 平均270秒の時間間隔を置いてから強化子が与えられる訓練の形式である. ある一定の時間間隔をとると, VI135秒スケジュールの方が, VI270秒スケジュールよりも2倍の強化子を得ることができる. Hemstein(1961)は, この並立のVIスケジュールの選択学習を行った後, キーの選択をどのように配分するかを検討した. その結果, 左(右)キーへの選択反応率が左(右)キーへの反応から供給された強化子の割合に対応していることを見出したのである. すなわち, 彼が提案した対応法則は, 下記の式が成り立つことを意味する.

$$\frac{R_1}{R_1 + R_2} = \frac{r_1}{r_1 + r_2} \quad (1)$$

ここで, R_1 は反応1 (例えば, 左キーへの反応) の数, R_2 は反応2 (例えば, 右キーへの反応) の数, r_1 は反応1によって得た強化子数, r_2 は反応2によって得た強化子数である.

この(1)式より, (2)式が得られる.

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{r_1}{r_2} \quad (2)$$

一般対応法則の基本となるオリジナルな対応法則は, Autor(1969)によって提案されて以来, 種々の実験にてその経験的妥当性が確認されてきた. その中で Baum(1976)は並立強化スケジュールでの被験体の反応比(R_1/R_2)は, 相対強化比(r_1/r_2)と(3)式のように対応しているとする一般対応法則を提案した.

$$\frac{R_1}{R_2} = k \left(\frac{r_1}{r_2} \right)^a \quad (3)$$

ここに, k は一方の選択肢への反応の偏りを, a は相対強化比に対する反応の感度を意味する経験定数である. (3)式を Hemstein(1961)が表現したような形の相対的選択率の形式で表現すると(4)式になる.

$$\frac{R_1}{R_1 + R_2} = \frac{kr_1^a}{kr_1^a + r_2^a} \quad (4)$$

Baum(1974, 1979)は, 一般対応法則において, k が特定の選択しバイアスを表現すると考え, $a > 1$ のとき過大対応(overmatching)になり, $a < 1$ のとき過小対応(undermatching)になるとした. 過大対応とは, 被験体の反応の割合が強化の割合に比べて極端になる現象であり, 過小対応とは, その逆に反応の割合が強化の割合に比べて極端な方向に行かない現象である. また, (4)式に示されているように, $k=1$ かつ $a=1$ のとき, (1)式の対応法則が成り立つことになる.

3. 一般対応法則の理論的背景について

一般に対応法則を説明する理論としては, 強化最大化(reinforcement maximization)理論(Rachlin, Green, Kagel, & Battalio, 1976; Rachlin, Battalio, Kagel, & Green, 1981)がある. この理論は, 対応法則に基づく選択反応が最大の強化を与えることを予想する. したがって, この理論の背後には, 被験体が長期的な意味での最適化を行うことを暗黙に仮定していることになる. Rachlin ら(1976)は, 強化率の合計の最大化と対応法則が等価であるということを主張したが, Heyman & Luce(1979)は, 数理モデルによる分析から Rachlin ら(1976)の主張が間違っていることを指摘している. Heyman & Luce(1979)は, 次のように結論づけている. "We have shown that maximizing overall reinforcement rate is not sufficient condition for matching. In contrast, those who have argued for maximizing have yet to demonstrate a plausible model

of behavior which support their hypothesis.” (Animal Learning Behavior, 7, pp.139 (1979)) .

対応法則の成立に関しては、強化最大化理論という長期的な最適化を仮定する巨視的理論のほかに、瞬間における強化率が最大になるように個体が選択行動を行っているとする微視的最大化 (momentary maximization) の理論 (Hinson & Staddon, 1983; Shimp, 1969) がある。また、被験体が時間と努力の両方あるいはそのいずれかを、選択肢のより良いほうに増加させるように逐次調整して、選択肢間に得られる強化効率を等しくするように選択を行っているとする逐次的改良 (melioration) の理論 (Herrnstein & Vaughan, 1980; Vaughan, 1981) が提案されている。しかし、それぞれの理論的立場からの論争はいまだに決着がついていない (Mazur, 1998; 坂上, 1997) 。また、これらの理論的説明は、対応法則に関するものが中心であり、一般対応法則の理論的説明についてはほとんど言及されていない。

3. 一般対応法則の意思決定論的解釈

一般対応法則を意思決定論的に説明する試みとして、行動的意思決定研究の中で多用されてきたランダム効用理論 (Thurstone, 1927; McFadden, 1974) と、古典的な精神物理法則であるフェヒナーの法則 (Fechner, 1860) の両者を基盤として、一般対応法則を導出したものがある (藤井・竹村, 2001; Fujii & Takemura, 2002; Takemura, & Fujii, 2004) 。

この導出過程を、これまでの論文とは多少表現を変えることによって説明する。まず、強化子 r_1, r_2 の感覚強度はフェヒナーの法則に従い、かつ、選択行動に確率的ノイズが影響すると前提した上で、以下のランダム効用の最大化行動という形で選択行動を定式化する。

$$\frac{R_1}{R_1 + R_2} = p(U_1 > U_2)$$

ただし,

$$U_1 = c \log_e(r_1) + d_1 + \varepsilon_1$$

$$U_2 = c \log_e(r_2) + d_2 + \varepsilon_2 \quad (5)$$

ここに、 $p(U_1 > U_2)$ は、効用 U_1 が効用 U_2 を越える確率であり、 R_i の選択確率を効用の差が 0 を越える場合とみなすのである。また、 $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ は誤差項、 c は強化子への効用の感度を意味するパラメータ、 d_1, d_2 は効用関数の切片である。

ここで、誤差項分布として互いに独立な二重指数分布 (ガッセル分布) を仮定し、積分計算を含む式展開を行うと、

$$p(1) = p(U_1 > U_2)$$

$$= p\left(c \log_e(r_1) + d_1 - c \log_e(r_2) + d_2 > \varepsilon_2 - \varepsilon_1\right)$$

$$= \frac{\exp\{c \log_e r_1 + d_1\}}{\exp\{c \log_e r_1 + d_1\} + \exp\{c \log_e r_2 + d_2\}}$$

$$= \frac{e^{d_1 - d_2} r_1^c}{e^{d_1 - d_2} r_1^c + r_2^c} \quad (6)$$

が得られる。また、これを書き換えると、(7) 式が得られる。

$$\frac{R_1}{R_2} = e^{(d_1 - d_2)} r_1^c / r_2^c = e^{(d_1 - d_2)} \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^c \quad (7)$$

上式の $e^{(d_1 - d_2)}$ を定数 k であり、(7) 式の a と (3) 式の c は記号表現が異なるだけであるので、(7) 式は (3) 式の一般対応法則を示していると解釈できる。すなわち、(7) 式と一般対応法則の (3) 式を見比べると、効用関数の切片の差のべき乗 $e^{(d_1 - d_2)}$ とパラメータ c が、一般対応法則のパラメータ k と a にそれぞれ一致している。

さて、これらのことから、一般対応法則における過大対応、過小対応、バイアスについて意思決定論的に解釈しよう。まず、過大対応は、 $c > 1$ の場合であるから、効用関数の傾きが急であり強化子への感度が高い場合に生じやすいと考えることができる。それに対して、過小対応は、 $c < 1$ の場合であるから、効用関数の傾きがゆるやかであり、強化子への感度が低い場合に生じると解釈することができる。また、バイアスについては、効用関数の切片の差異が存在しない場合 ($d_1 - d_2 = 0$)、バイアスを示す (3) 式の k は 1 になる。また、効用関数の切片の差異が正の場合 ($d_1 - d_2 > 0$)、 $k > 1$ となり、選択肢 1 に対するバイアスがあることを示す。また逆に、効用関数の切片の差異が負の場合 ($d_1 - d_2 < 0$)、 $k < 1$ となり、選択肢 2 に対するバイアスがあることを示す。このように、これまでの動物の選択行動における対応法則、過大対応、過小対応、バイアスなどをすべて強化子に対する効用関数の形状に帰着できるのである。

4. 一般対応法則に関する定理と含意

藤井・竹村 (2001) の研究や Yellott (1977) のランダム効用と選択確率の研究における研究を整理して一般化すると以下のような一般化対応法則に関する諸定理が導かれるので (Takemura, & Fujii, 2004) ., そのいくつかを報告して、その定理の含意について説明する。

定理 1 (5) 式に示されたランダム効用モデル (フェヒナー法則とランダム効用最大化が成り立つこと) が成立し、ランダム効用の誤差項 $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ が下記の互いに独立な二重

指数分布 (ガンベル分布) に従う時, (6) 式の一般対応法則が成り立つ.

$$P(\varepsilon_i \leq x) = \exp[-\exp(-\alpha x + \beta)]$$

$$(\alpha > 0, \beta: \text{arbitrary})$$

この定理は, フェヒナー法則とランダム効用理論から一般化対応法則が導けることを示しているが, そのときに, 二重指数分布 (ガンベル分布) のパラメータが α が正であるだけで成立することを示している. また, ランダム効用の誤差項のパラメータが正の線形変換に関して一意であることを示している.

定理 2 ランダム効用の誤差項 $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ が上記の二重指数分布に従う時, (5) 式のランダム効用モデルはルース (Luce, 1959) の選択公理と等価である. また, ランダム効用の誤差項のパラメータは, 正の線形変換に関して一意である.

ここで選択公理とは, 選択肢集合 T の部分集合 S を考え, S の部分集合 Q を考えたとき, T の中から Q が選ばれる確率は, T の中から S が選ばれる確率と, S の中から Q が選ばれる確率の積になっている (ただし, 選択確率はいずれも 0 でも 1 でもないとする). また, 選択公理が満たされるときは,

$$\frac{R_1}{R_1 + R_2} = \frac{v(r_1)}{v(r_1) + v(r_2)}$$

となるような正の実数値関数 v が存在することになる.

定理 3 (5) 式のランダム効用モデルの差の分布が下記のロジスティック分布 $Df(x)$ に従うことは, (5) 式のランダム効用モデルが (6) 式の一般対応法則に等価であることの必要十分条件である.

$$D_{f(x)} = \frac{1}{1 + e^{-\alpha x}}, \quad \alpha > 0$$

このことは, ランダム効用モデルの誤差項の差がロジスティック分布になっているときにのみ, フェヒナー型のランダム効用理論が一般対応法則と等価になることを示している. ランダム効用モデルの誤差項が独立な二重指数分布 (ガンベル分布) のときは誤差項の差の分布はロジスティック分布になるが, 逆は必ずしも真ではない. Yellott (1977) は, 他の分布でも誤差項の差の分布がロジスティック分布になる例を示している.

定理 4 (5) 式のランダム効用モデルの差の分布が下記のロジスティック分布 $Df(x)$ に従うことは, (5) 式のランダム効用モデルがルース (Luce, 1959) の選択公理に等価であることの必要十分条件である (Yellott, 1977).

定理 5 (5) 式のフェヒナー型のランダム効用モデルとルース (Luce, 1959) の選択公理が成立する条件で, 一般対応法則が成立する.

このことは, 一般対応法則が, フェヒナー法則, サーストンのランダム効用モデルという意思決定論や心理学の古典的概念と密接な関連性を持っていることを示してい

る. フェヒナー法則, サーストンのランダム効用モデル, ルースの選択公理の同時存在が, 一般対応法則を成り立たせていることを示しており, 意思決定論から対応法則を理論的に説明可能なことを示している.

5. 結 論

本論文では, 動物や人間を含めた個体の選択行動研究において, 選択反応率とその反応によって得られる強化子数が対応するという対応法則を一般化した一般対応法則について理論的考察を行った. オリジナルの対応法則では, 反応バイアス, 過大対応, 過小対応などを説明するうえで問題があるので, 対応法則を拡張した一般対応法則が提案されているが (Baum, 1974, 1979), 一般対応法則がなぜ成立するのかというということについて, これまでに充分明らかにされていなかった.

本論文では, 一般対応法則について解説し, 近年の我々の研究における一般対応法則に関する理論的研究 (藤井・竹村, 2001; Fujii & Takemura, 2002; Takemura & Fujii, 2004) の経緯を紹介し, 意思決定理論と一般対応法則がどのような関係にあるのかを検討した.

まず, 一般対応法則は, フェヒナーの対数型の効用関数と二重指数分布 (ガンベル分布) の誤差項を仮定したランダム効用理論から導出できることが明らかになった. 一般対応法則における過大対応, 過小対応, バイアスについて意思決定論的に解釈すると, まず, 過大対応は, 効用関数の傾きが急であり強化子への感度が高い場合に生じ, 過小対応は, 効用関数の傾きがゆるやかであり, 強化子への感度が低い場合に生じると解釈することができた. また, バイアスについては, 効用関数の切片の差異が正か負かによって説明できることが明らかになった. このように, 対応法則やそれに関連する現象を効用関数の形状に帰着できることがわかった.

また, 理論的考察により, フェヒナー法則, サーストンのランダム効用モデル, ルースの選択公理の同時存在が, 一般対応法則を導くことがわかった.

今後も, 人間や動物の選択現象を示す対応法則を, ランダム効用理論やフェヒナーの心理物理関数などの概念によって説明することによって, より一層に明らかにできると期待できる.

引用文献

- Autor, S. M. (1969). The strength of conditioned reinforcers as a function of frequency and probability of reinforcement. In D. P. Hendry (Ed.), *Conditioned reinforcement* (pp. 127-162). Homewood, IL: Dorsey Press.
- Baum, W. M. (1974). On two types of deviation from the matching law: Bias and undermatching. *Journal of the Experimental Analysis of Behavior*, 22, 231-242.
- Baum, W. M. (1979). Matching, Undermatching, and Overmatching in Studies of Choice. *Journal of the Experimental Analysis of Behavior*, 32, 269-281.

- Fechner, G.T. (1860). *Elemente der Psychophysik*. Leipzig: Breitkopf und Härtel, 2, p. 559 (Reprinted, Bristol: Thoemmes Press, 1999).
- Fujii, S. and Takemura, K. (2002) Fechner Law and random utility hypothesis leads the matching law. Paper presented at Society for Judgment and Decision Making, Kansas-City, MO, USA
- 藤井 聡・竹村和久 (2001) フェヒナーの法則とランダム効用理論に基づく一般対応法則の理論的説明, 日本心理学会第65 回大会, p. 580.
- Herrnstein, R.J. (1961). Relative and absolute strength of response as a function of frequency of reinforcement. *Journal of the Experimental Analysis of Behavior*, 4, 267-272.
- Herrnstein, R. J., & Vaughan, W., Jr. (1980). Melioration and behavioral allocation. In J. E. R. Staddon (Ed.), *Limits to action: The allocation of individual behavior* (pp. 143-176). New York, NY: Academic Press.
- Heyman, G.M., & Luce, R.D. (1979). Operant matching is not a logical consequence of maximizing reinforcement rate. *Animal Learning and Behavior*, 7, 133-140.
- Hinson, J. M., & Staddon, J. E. R. (1983). Hill-climbing by pigeons. *Journal of the Experimental Analysis of Behavior*, 39, 25-47.
- Luce, R.D. (1959), 'Individual choice behaviour: a theoretical analysis', New York: Wiley
- Mazur, J. E. (1998). *Learning and behavior (4th Ed.)*. Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall. (邦訳 磯博行・坂上貴之・川合伸幸訳 メイザーの学習と行動(日本語第2版). 二瓶社 1999.)
- McFadden, D. (1973), 'Conditional logit analysis of qualitative choice behaviour', in Zarembka, P (ed.), *Frontiers in econometrics*, New York, Academic Press, pp. 105-42
- Rachlin, H., Green, L., Kagel, J. H., & Battalio, R. C. (1976). Economic demand theory and psychological theories of choice. In G. H. Bower (Ed.), *The Psychology of Learning and Motivation*, Vol. 10 (pp. 129-154). New York, NY: Academic Press.
- Rachlin, H., Battalio, R., Kagel, J., & Green, L. (1981). Maximization theory in behavioral psychology. *Behavioral and Brain Sciences*, 4, 371-388.
- 坂上貴之 (1997). 行動経済学と選択理論. 行動分析学研究, 11, 88-108.
- Shimp, C. P. (1969). Optimal behavior in free-operant experiments. *Psychological Review*, 76, 97-112.
- Takemura, K. and Fujii, S. (2004) Interpretation of Matching Law: From the Assumptions of Luce Choice Axiom, Fechner Law, and Random Utility Maximization. *Paper presented at the 35th European Mathematical Psychology Group Meeting, Ghent Belgium*.
- Thurstone, L. (1927), A Law of comparative judgement. *Psychological Review* 34: 273-86.
- Vaughan, W., Jr. (1981). Melioration, matching, and maximization. *Journal of the Experimental Analysis of Behavior*, 36, 141-149.
- Yellot, J.I. (1977) The relationship between Luce's choice axiom, Thurstone's theory of comparative judgment, and double exponential distribution. *Journal of Mathematical Psychology*, 15, 109-144.